包除原理

有限集合 A に対して，元（要素）の個数を $n(A)$ で表すとする．このとき $A_1, \ldots, A_m$ $(m \geqq 2)$ を有限集合とすると

$$n(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq m} n(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right)$$

が成り立つ．

証明. 数学的帰納法で示すが，その前に次の事実を用いる．

集合 $A_1, \ldots, A_n, B$ に対して

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$
$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cap \cdots \cap (A_n \cap B)$$

が成り立つ．

（i）$m = 2$ のとき，Venn 図により $A_1 = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_1 \cap A_2)$, $A_2 = (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$ のように，互いに共通部分を持たない 2 つの集合に分解できることが確かめられる．よって Venn 図より

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2) &= n(A_1 \cap \overline{A_2}) + n(A_1 \cap A_2) + n(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= n(A_1 \cap \overline{A_2}) + n(A_1 \cap A_2) + n(\overline{A_1} \cap A_2) + n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_2) \\ &= n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかり，$m = 2$ のときが示された．

（ii）$m = M$ のとき成り立つと仮定する．このとき $m = M + 1$ のときは，（i）より

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup \cdots \cup A_{M+1}) &= n(A_1 \cup \cdots \cup A_M) + n(A_{M+1}) - n(A_{M+1} \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_M)) \\ &= \sum_{k=1}^{M} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq M} n(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) + n(A_{M+1}) \\ &\qquad - n((A_1 \cap A_{M+1}) \cup \cdots \cup (A_M \cap A_{M+1})) \end{aligned}$$

となる．

ここで，右辺の第 3 項をさらに変形していくと

$$\begin{aligned} n((A_1 \cap A_{M+1}) \cup \cdots \cup (A_M \cap A_{M+1})) &= \sum_{k=1}^{M} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq M} n((A_{i_1} \cap A_{M+1}) \cap \cdots \cap (A_{i_k} \cap A_{M+1})) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{M} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq M} n((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \cap A_{M+1}) \right) \end{aligned}$$

となる．

ゆえに

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup \cdots \cup A_{M+1}) &= \left(\sum_{k=1}^{M} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq M} n(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) + n(A_{M+1}) \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{M} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq M} n((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \cap A_{M+1}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq M+1} n(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) \end{aligned}$$

が得られ，$m = M + 1$ のときも示せた．

（i），（ii）により数学的帰納法から示された．■